

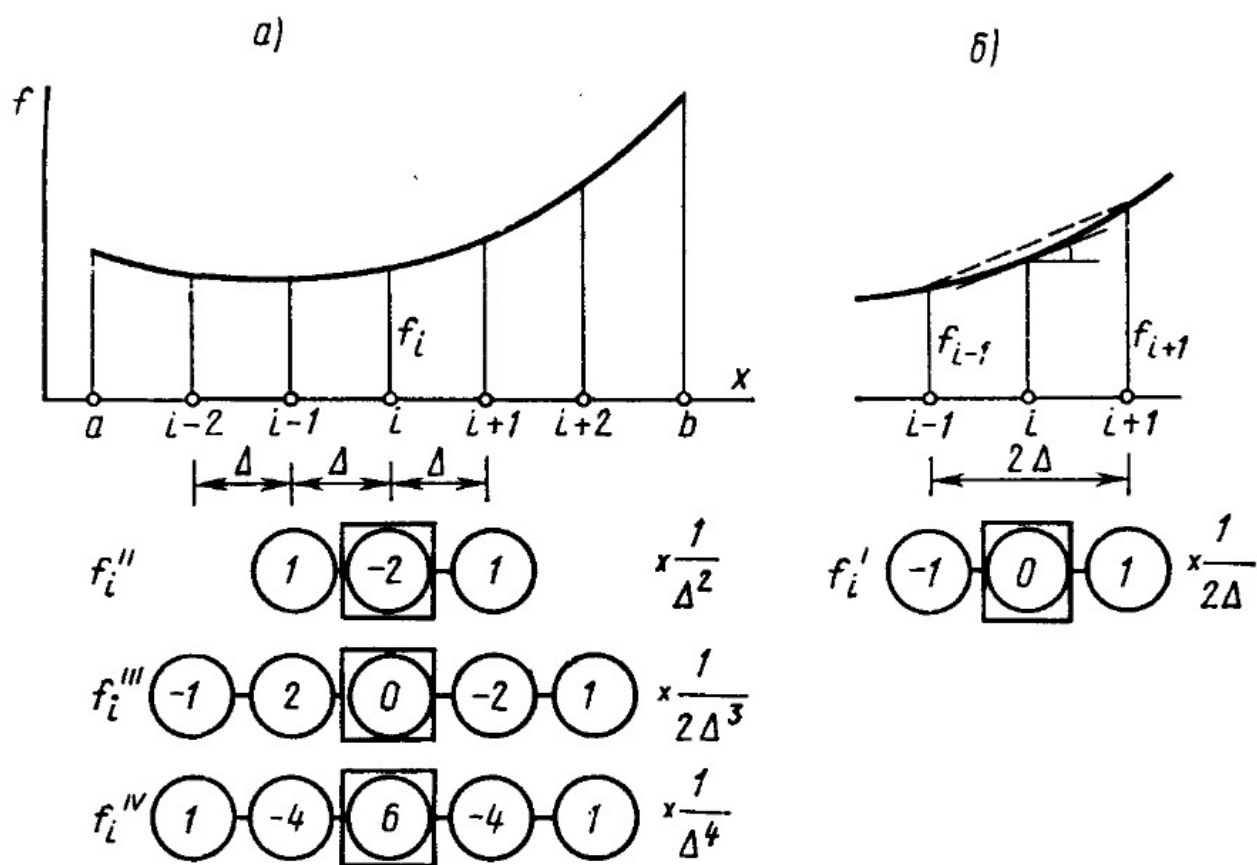
Шаблоны метода конечных разностей

Рассмотрим расчет балки-стенки методом конечных разностей. Для выполнения расчета достаточно найти функцию напряжений φ , которая удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Его приближенное решение можно найти методом конечных разностей.

Этот метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также методом сеток. Он состоит в следующем. Вся область рассматриваемого тела (область решения краевой задачи) — ось балки, площадь пластины, поверхность оболочки и т. д. — покрывается сеткой линий, точки пересечения которых называют узлами. За неизвестные принимаются значения разыскиваемых функций в узлах сетки. Для этого строятся приближенные формулы для производных от функций, выраженные через узловые ординаты



Примеры шаблонов для приближенного вычисления производных. Вывод формул

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta + \frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta^2 + \dots \quad (8.1)$$

Положим $x_0 = x_i$ и применим формулу (8.1) для точек $i + 1$ и $i - 1$:

$$\left. \begin{aligned} f_{i+1} &= f_i + f'_i\Delta + \frac{1}{2!}f''_i\Delta^2 + \frac{1}{3!}f'''_i\Delta^3 + \dots; \\ f_{i-1} &= f_i - f'_i\Delta + \frac{1}{2!}f''_i\Delta^2 - \frac{1}{3!}f'''_i\Delta^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Ограничимся тремя членами ряда в (8.2) (что соответствует замене истинной кривой $f(x)$ квадратной параболой, проведенной через ординаты f_{i-1} , f_i и f_{i+1}). Тогда вычитая и складывая строки (8.2), найдем первую и вторую производные в точке i в виде

$$f'_i = \frac{-f_{i-1} + f_{i+1}}{2\Delta}; \quad (8.3)$$

$$f''_i = \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{\Delta^2}. \quad (8.4)$$

Третью производную f'''_i можно получить, применив оператор первой производной ко второй производной f'' , значение которой в каждой узловой точке получается по оператору второй производной

$$f'''_i = \frac{d}{dx}(f'')_i = \frac{-f''_{i-1} + f''_{i+1}}{2\Delta} = \frac{-(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i) + (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})}{2\Delta \cdot \Delta^2}$$

или

$$f'''_i = \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta^3}. \quad (8.5)$$

Аналогично, применив оператор второй производной к оператору второй производной, получим формулу четвертой производной

$$f^{IV}_i = \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta^4}. \quad (8.6)$$

Для функции двух переменных

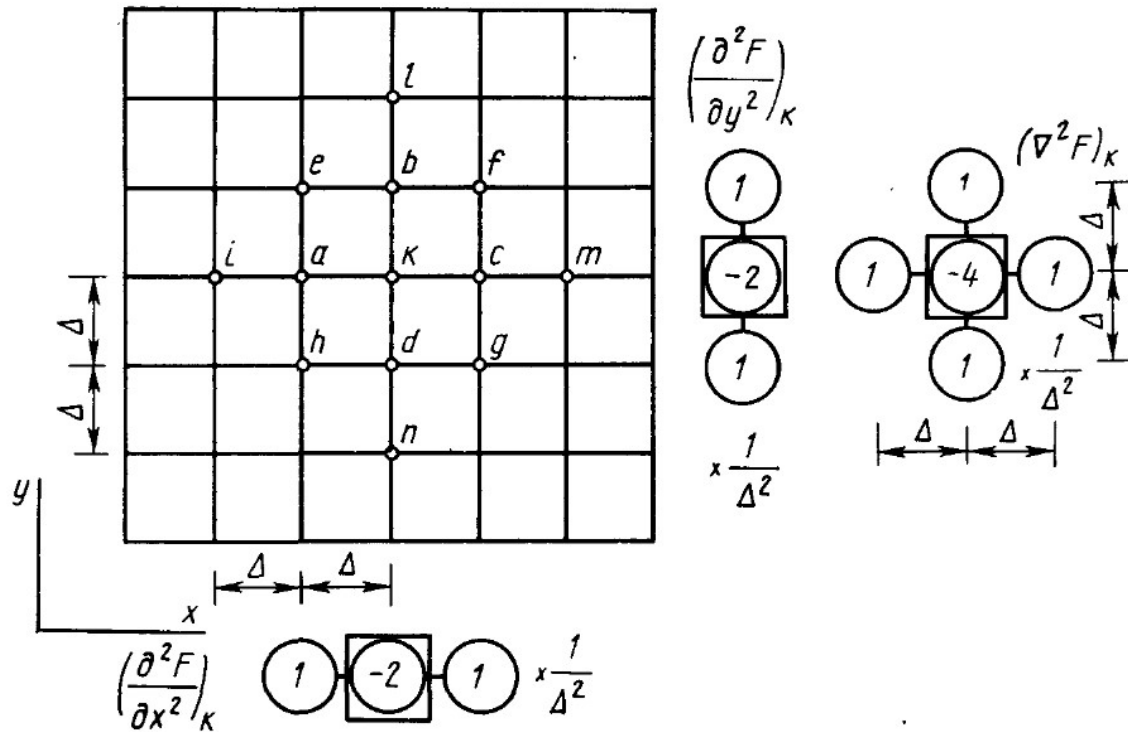


Рис. 8.4

Особый интерес представляет бигармонический оператор, который получим, дважды применив оператор Лапласа (6.8)

$$(\nabla^2 \nabla^2 F)_k = \nabla^2 (Z)_k = \frac{Z_a + Z_b + Z_c + Z_d - 4Z_k}{\Delta^2},$$

где $Z_j = (\nabla^2 F)_j$, $j = a, b, c, d, k$. Последовательно наложив на эти точки «крест» гармонического оператора, получим слагаемые числителя искомой формулы, выраженные через ординаты F . После приведения подобных членов будем иметь

$$(\nabla^2 \nabla^2 F)_k = \frac{20F_k - 8(F_a + F_b + F_c + F_d) + 2(F_e + F_f + F_g + F_h) + (F_l + F_m + F_n + F_t)}{\Delta^4}. \quad (8.7)$$

Схема бигармонического оператора изображена на рис. 8.5.

Вторая смешанная производная может быть получена по схеме

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_k = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_k = \frac{-(\partial F / \partial y)_a + (\partial F / \partial y)_c}{2\Delta} = \frac{F_h - F_e + F_f - F_g}{4\Delta^2}. \quad (8.8)$$

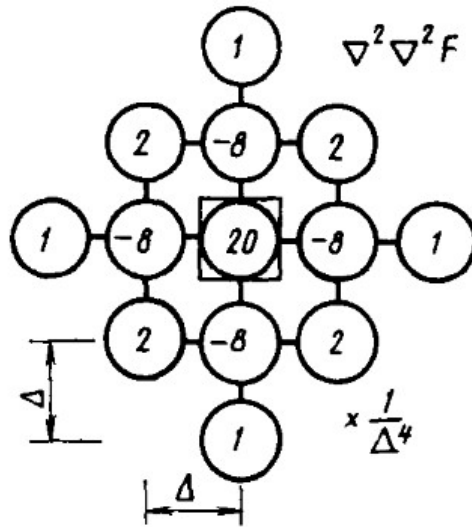


Рис. 8.5

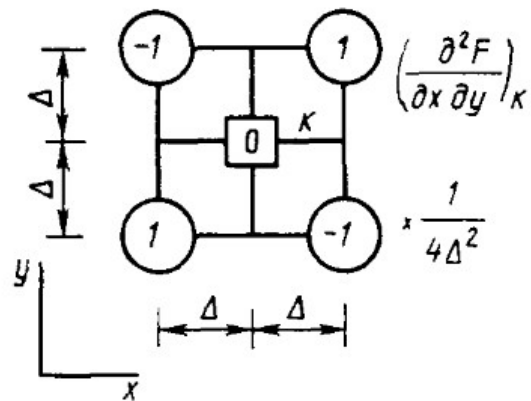


Рис. 8.6

Приведенные шаблоны используются для конечно-разностной аппроксимации бигармонического оператора $\nabla^2 \nabla^2 \phi$ (см. 8.12 и рис. 8.5) и напряжений $\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ (см. рис. 8.4 и рис. 8.6). Для нахождения функции напряжений ϕ в узлах на контуре и в законтурных узлах используется рамная аналогия, описание которой приведено на примере расчета конкретной балки-стенки.